Lezione 26

MAPPA ESPONENZIALE

(M, ∇) $\quad p \in M \quad V_p \subseteq T_pM \quad \exp_p : V_p \to M$

CONNESSIONE SIMMETRICA

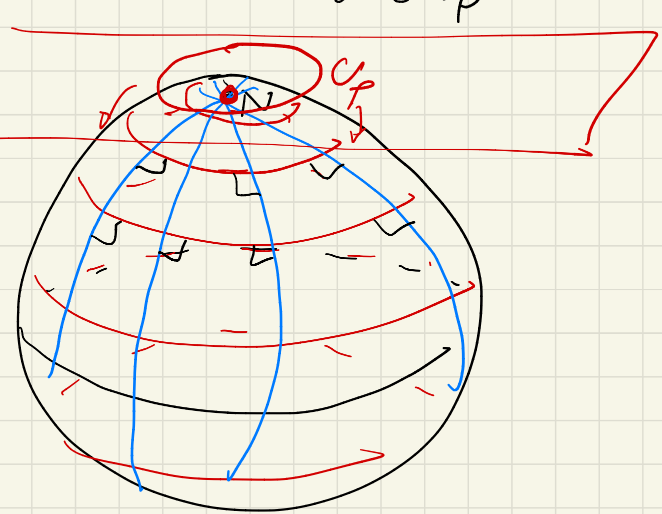
V_p aperto stellato $\quad \exp(tv) = \gamma_v(t) \quad \forall v \in T_pM$

$\forall t$ piccolo
$tv \in V_p$

Def: $p \in M$ $\quad U_n$ INTORNO NORMALE di p

è $U(p) = \exp_p(U_p)$ t.c.

- $U_p \subseteq V_p$ è stellato in 0
- $\exp_p|_{U_p} : U_p \to U(p)$ diffeomorfismo



$\exp_p$ è diffeo loc in 0

$\Rightarrow$ p ha intorni normali.

$\exp_p : U_p \to U(p)$ è una carta. (anzi PARAMETRIZZAZIONE)

Fissiamo una base di T_pM ---> $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ isomorfismo lineare

$$M \supseteq \mathring{U}(p) \xleftarrow[\exp_p]{\sim} U_p \subseteq \mathbb{R}^n$$

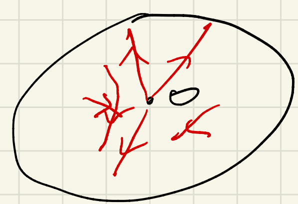
Le coordinate $x_1, \dots, x_n$ costruite così si chiamano

COORDINATE NORMALI

$p = 0$

<u>Prop</u>: Le geodetiche radiali uscenti da $p = 0$ sono rette in $\mathbb{R}^n$ percorse a velocità costante: $\gamma_v(t) = t \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
$\forall t < \varepsilon$

$$\Gamma_{ij}^k(0) = 0 \qquad \forall i, j, k$$



$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0$$

$x(t) = tv$ è soluzione del sistema $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow v^i v^j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall k, \ \forall v \in \mathbb{R}^n$

$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ simmetria $\xRightarrow[\text{LINEARE}]{\text{ALGEBRA}}$ $\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k$

Se ∇ viene da g, allora la base che scegliamo per T_pM la prendiamo ORTONORMALE, in modo che

$$g_{ij}(0) = \begin{pmatrix} -I_p & \\ & I_q \end{pmatrix} \qquad \text{con } T_pM \underset{\text{isometria}}{\cong} \mathbb{R}^{p,q}$$

Prop: In coordinate normali $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0 \quad \forall i, j, k$

dim: COMPATIBILITÀ $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = g \underset{0}{\underset{\parallel}{\Gamma}} + g \underset{0}{\underset{\parallel}{\Gamma}}$ $\to$ è zero

$\square$

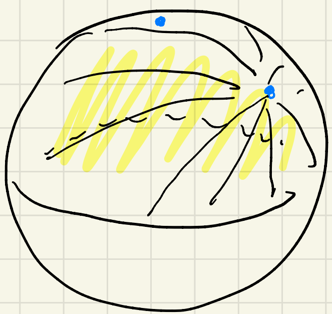
Def: Un INSIEME TOTALMENTE NORMALE $Z \subseteq M$ (M, ∇) simm.

ē un aperto che ē intorno normale di ogni suo punto

Teo: Ogni $p \in M$ ē contenuto in un Z totalmente normale

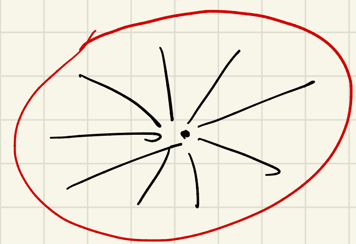
Es: $\mathbb{R}^{p,q}$ $g = \begin{pmatrix} -I_q & \\ & I_p \end{pmatrix}$ Un convesso ē tot. normale

Es:



S^2

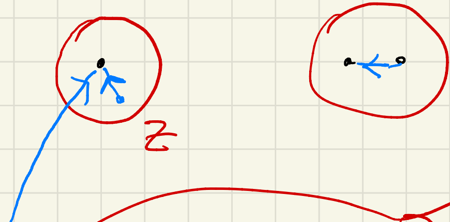
Z = emisfero

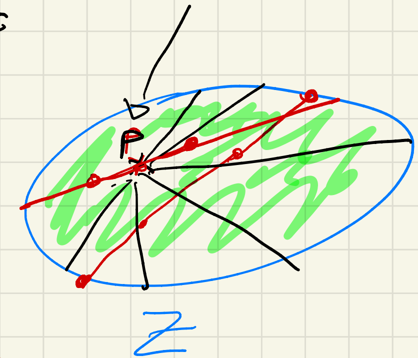


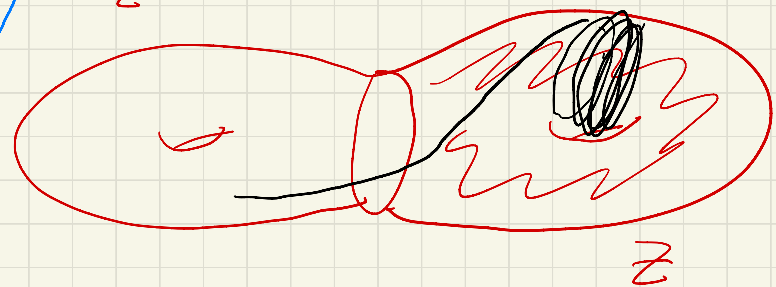
Prop: $Z \subseteq M$ insieme totalmente normale

Ogni geodetica in Z si può estendere in entrambe le direzioni temporali finché non tocca ∂Z

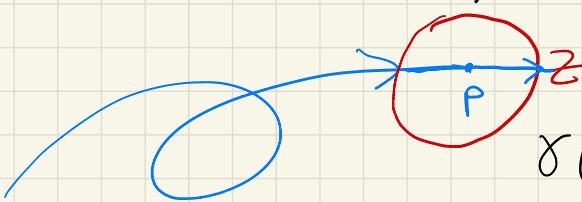
$\mathbb{R}^2 - \{0\}$







<u>Cor</u>: $\gamma : (a,b) \to M$ geodetica che si estende in modo continuo $\left(\exists \lim_{t \to b} \gamma(t) =: \gamma(b) \right) \Rightarrow$ si estende come geodetica a $\gamma : (a, b+\varepsilon) \to M$



$\gamma(t) \to p \qquad \gamma'(t) \to ?$

dim. $p := \lim_{t\to b} \gamma(t)$

$\exists$ intorno totalmente normale di p

<u>Caso Riemanniano</u>

<u>Def</u>: (M,g) Riemanniana $p\in M$ $\exp_p : V_p \to M$ diffeo loc in 0

$(T_pM, g(p)) \underset{\text{isometrico}}{\cong} \mathbb{R}^n$ Euclideo

$B(0,r) \subseteq T_pM$ Se r è abbastanza piccolo

1) $B(0,r) \subseteq V_p$ 2) $\exp_p|_{B(0,r)} : B(0,r) \to M$ è diffeo sull'immagine

In questo caso $\exp_p(B(0,r))$ è detta

PALLA GEODETICA (di raggio r)

Def: Il RAGGIO DI INIETTIVITÀ

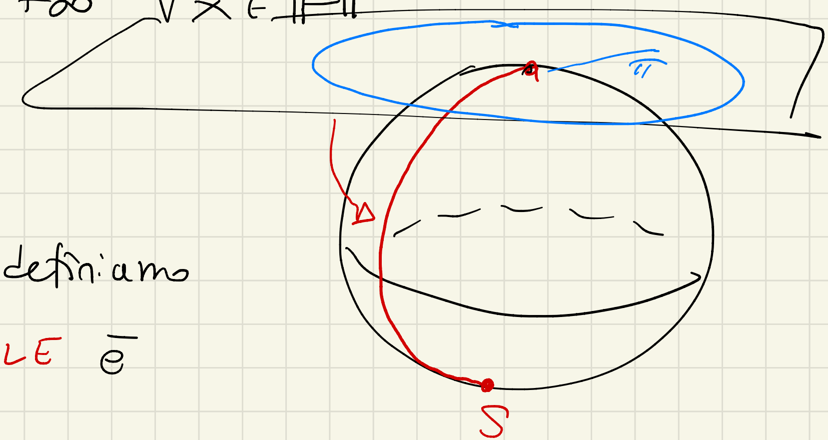
$$inj_p M := \sup\{ r>0 \ : \ 1) \ e \ 2) \}$$

Una palla geodetica è un intorno normale

Es: $M = \mathbb{R}^{p,q}$ $\qquad inj_x M = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}$

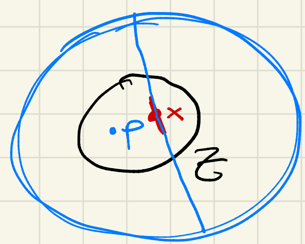
$M = \mathbb{H}^n$ $\qquad inj_x \mathbb{H}^n = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{H}^n$

$M = S^n$ $\qquad inj_x S^n = \pi$



Def: In un contesto Riemanniano definiamo un INSIEME TOTALMENTE NORMALE è $Z \subseteq M$ t.c.

$\forall p \ \exists$ palla geod. centrata in p che lo contiene



FAMIGLIE DI CURVE

(M, ∇)
simmetrica

Def: Una FAMIGLIA DI CURVE è una

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \longrightarrow M \quad \text{liscia} \qquad I \subseteq \mathbb{R}$$

($s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $t \in I$)

$$\gamma_s : I \to M \qquad \gamma_s(t) = f(s,t)$$

Oss: Se f è embedding, $\operatorname{Im} f \subseteq M^n$ è una superficie

Se $df_{(s,t)}$ è iniettivo, allora f è loc. emb.

Def: Un CAMPO LUNGO f è $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to TM$

t.c. $X(s,t) \in T_{f(s,t)} M$

Es: $S(s,t) = df_{(s,t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \qquad T(s,t) = df_{(s,t)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$

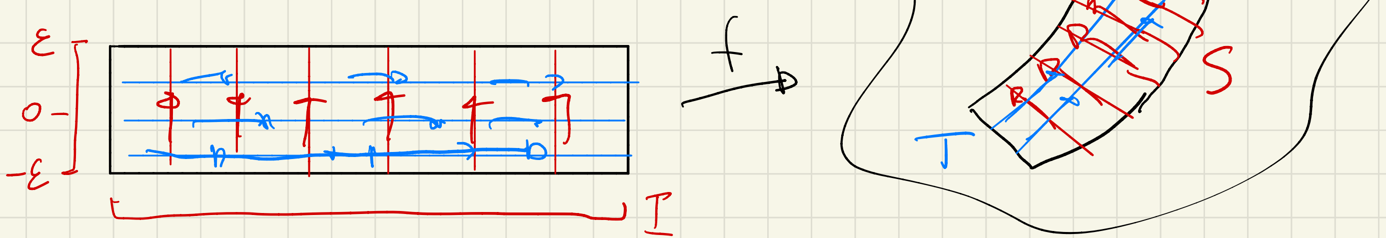
Se f è emb. campo lungo f = campo su $\operatorname{Im} f \subset M$

<u>Def</u>: X campo lungo f. $D_s X$, $D_t X$ due nuovi campi lungo f definiti usando le definizioni di D_s e D_t lungo le curve $s \mapsto f(s,t)$, γ_s

<u>Prop</u>: Vale la relazione $\boxed{D_t S = D_s T}$

<u>dim</u>:

- Se f è embedding:



S, T sono f-correlati con $\frac{\partial}{\partial r}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$

$\Rightarrow [S,T]$ è f-correlato con $\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0$

$\Rightarrow [S,T] = 0$ Torsione nulla: $\underset{=0}{T(S,T)} = \nabla_S T - \nabla_T S - \underset{=0}{[S,T]}$

$$[S,T] = 0 \Rightarrow \nabla_S T = \nabla_T S \Rightarrow D_s T = D_t S$$

$$[S,T] = \nabla_S T - \nabla_T S$$

- Dimostrazione generale:

In carte $f: (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to \mathbb{R}^n$

$$S(s,t) = \frac{\partial f}{\partial s} \qquad T(s,t) = \frac{\partial f}{\partial t}$$

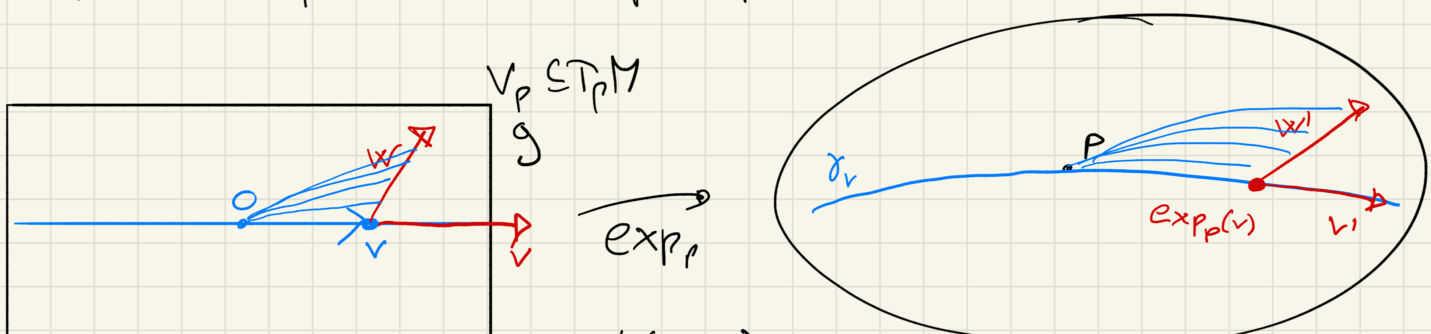
$$D_t S = D_t\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} + \frac{\partial f^i}{\partial t}\frac{\partial f^j}{\partial s}\Gamma^k_{ij} e_k$$

$$D_s T = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + \frac{\partial f^i}{\partial s}\frac{\partial f^j}{\partial t}\Gamma^k_{ij} e_k$$

$$\Longrightarrow D_t S = D_s T$$

Lemma di Gauss

(M,g) pR $\qquad p \in M \qquad \exp_p : V_p \longrightarrow M$



$v', w' \in T_{\exp_p(v)} M \qquad v' = d(\exp_p)_v(v) \qquad w' = d(\exp_p)_v(w)$

Lemma: $\exp_p$ è un ISOMETRIA RADIALE

$$\langle v', w' \rangle = \langle v, w \rangle$$

dim: $f(s,t) = \exp_p\big(t(v+sw)\big)$ $\qquad f(0,t) = \gamma_v(t)$

$s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\qquad f(s,t) = \gamma_{v+sw}(t)$

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to M \qquad \Downarrow$$

Famiglia di geodetiche $\qquad S, T$ s.t. $\boxed{D_t T = 0}$

$$\langle S, T \rangle : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to \mathbb{R} \qquad \boxed{D_t S = D_s T}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle S, T \rangle = \langle D_t S, T \rangle + \langle S, \underbrace{D_t T}_{=0} \rangle = \langle D_s T, T \rangle$$

ex per la compatibilità di g

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \langle T, T \rangle = \langle v, w \rangle$$

$$\boxed{\langle T, T \rangle = \langle v+sw, v+sw \rangle}$$

$$\langle S, T\rangle(0,0) = \langle S(0), T(0)\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$$

$s = 0$
$t = 0$

$$\Rightarrow \langle S, T\rangle(0,t) = t\langle v, w\rangle$$

$$t = 1 \Rightarrow \boxed{\langle S, T\rangle(0,1) = \langle v, w\rangle}$$